# Corso di fisica II

## *Prova scritta del primo modulo del 14/11/07*

### Esercizio 1

L'esercizio si risolve applicando il teorema di Gauss. Data la simmetria cilindrica del problema è conveniente esprimere gli integrali di volume e superficie in coordinate cilindriche.
Per $r < R$

$$2\pi r h E_R(r) = \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\int_0^r r'\,dr'\,\rho(r') = \frac{18\pi h\rho_0}{R\varepsilon_0}\int_0^r r'^2\,dr' = \frac{18\pi h\rho_0}{R\varepsilon_0}\frac{r^3}{3}$$

$$\Rightarrow E_R(r) = \frac{3\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{R}$$

Per $R < r < 2R$

$$2\pi r h E_R(r) = \frac{18\pi h\rho_0}{R\varepsilon_0}\int_0^R r'^2\,dr' - \frac{4\rho_0\pi h}{\varepsilon_0}\int_R^r r'\,dr' = \frac{18\pi h\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{3} - \frac{4\rho_0\pi h}{2\varepsilon_0}\left(r^2 - R^2\right)$$

$$\Rightarrow E_R(r) = \frac{3\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{\left(r^2 - R^2\right)}{r} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(4\frac{R^2}{r} - r\right)$$

All'esterno del cilindro infine, $r > 2R$

$$2\pi r h E_R(r) = \frac{18\pi h\rho_0}{R\varepsilon_0}\int_0^R r^2 dr - \frac{4\rho_0\pi h}{\varepsilon_0}\int_R^{2R} r\,dr = \frac{18\pi h\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{3} - \frac{4\rho_0\pi h}{2\varepsilon_0}\left(4R^2 - R^2\right)$$

$$\Rightarrow E_R(r) = \frac{3\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{3R^2}{r} = 0$$

Poiché il campo esterno è nullo, per trovare il potenziale possiamo integrare il campo elettrico da 2R a 0 (il potenziale a 2R è uguale al potenziale all'infinito: sono nulli)

$$\varphi(0) = -\int_R^0 \frac{3\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{R}dr - \int_{2R}^R \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(4\frac{R^2}{r} - r\right)dr = \int_0^R \frac{3\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{R}dr + \int_R^{2R}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(4\frac{R^2}{r} - r\right)dr =$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2 - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}3R^2 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2\log 2 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}R^2 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}R^2\log 2 = 40.1V$$

**Esercizio 2**

Per corrispondere a dei campi elettrostatici è necessario che il rotore sia nullo.
Per un generico campo vettoriale F, definiti *i,j,k* i versori di *x,y,z,* il rotore si esprime come

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\hat{\imath}\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y\right)+\hat{\jmath}\left(\partial_z F_x-\partial_x F_z\right)+\hat{k}\left(\partial_x F_y-\partial_y F_x\right)=0$$

Uguale a zero è stato posto per richiedere che il campo sia conservativo.

Cominciamo con il campo A:

$A_y=0$

$\partial_y=0$

poiché nessuna componente del campo dipende da y, la derivata parziale rispetto a y è nulla per tutte le componenti.
La condizione sul rotore si riduce quindi a

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\hat{\jmath}\left(\partial_z A_x-\partial_x A_z\right)=0$$

Calcoliamo quindi le derivate:

$$\partial_x A_z=\frac{b}{\sqrt{x^2+z^2}}-\frac{1}{2}2x^2b\left(x^2+z^2\right)^{-3/2}-\frac{1}{2}2axz\left(x^2+z^2\right)^{-3/2}=\frac{b\left(x^2+z^2\right)-bx^2-axz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\partial_z A_x=\frac{-b\left(x^2+z^2\right)+bz^2+axz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\partial_x A_z-\partial_z A_x=\frac{b\left(x^2+z^2\right)}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{b}{\sqrt{x^2+z^2}}\neq 0$$

Quindi il campo vettoriale A non può rappresentare un campo elettrostatico.

Vediamo per il campo B

$B_x=0$ è l'unica semplificazione. La condizione sul rotore si riduce a

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\hat{\imath}\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y\right)+\hat{\jmath}\left(-\partial_x F_z\right)+\hat{k}\left(\partial_x F_y\right)=0$$

Cominciamo a calcolare la derivata

$\partial_x B_z=2cxy\left(x^2+z^2\right)^{-2}\neq 0$

Abbiamo già trovato una componente del rotore diversa da zero: il campo B non può rappresentare un campo elettrostatico.